Metod varijacije konstanti

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x - 3y + 4$$
$$\dot{y} = 2x - 2y - 1$$

Rj.
Rješenje sistema će biti f-je $x = x(t)$ i $y = y(t)$.
Prvo odredimo opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema

$$3x - \dot{x} - 3y = 0$$
$$2x - 2y - \dot{y} = 0 \qquad \dots(1)$$

$$\dot{x} = \lambda A e^{\lambda x}$$
$$\dot{y} = B\lambda e^{\lambda x}$$
$$\Uparrow$$

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda x}$, $y = Be^{\lambda x}$ pa ako to uvrstimo u (1) imamo ,

$$3Ae^{\lambda x} - A\lambda e^{\lambda x} - 3Be^{\lambda x} = 0 \qquad /: e^{\lambda x}$$
$$2Ae^{\lambda x} - 2Be^{\lambda x} - B\lambda e^{\lambda x} = 0 \qquad /: e^{\lambda x}$$

$$(3-\lambda)A - 3B = 0$$
$$2A + (-2-\lambda)B = 0$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta zadnjeg sistema je

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 6 = -6 \underline{-3\lambda} \underline{+2\lambda} + \lambda^2 + 6 =$$
$$= \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

Karakteristična jednačina $\lambda(\lambda-1) = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

a) Za $\lambda_1=0$ imamo

$$\begin{array}{l} 3A-3B=0 \\ 2A-2B=0 \\ \hline A=B \end{array}$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $B=1 \Rightarrow A=1$

$$x_1(t)=1e^{0t}=1$$
$$y_1(t)=1\cdot e^{0t}=1$$

b) Za $\lambda_2=1$ imamo

$$\begin{array}{l} 2A-3B=0 \\ 2A-3B=0 \\ \hline B=\frac{2}{3}A \end{array}$$

sistem ima ∞ mnogo rješenja, jednu promjenjivu uzimamo proizvoljno

za $A=3 \Rightarrow B=2 \quad \Rightarrow \quad x_2(t)=3e^t$

$$y_2(t)=2e^t$$

Opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$x(t)=C_1+3C_2e^t$$
$$y(t)=C_1+2C_2e^t$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t)=C_1(t)+3C_2(t)e^t$$
$$y(t)=C_1(t)+2C_2(t)e^t$$

pri čemu izvode C_1', C_2' f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sistema

$$C_1'+3C_2'e^t=4$$
$$C_1'+2C_2'e^t=-1$$

Nepoznate su C_1' i C_2' i ovaj sustav možemo riješiti Kronecker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 1 & 2e^t & -1 \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot (-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3e^t & 4 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{I_v + II_v \cdot 3}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & -e^t & -5 \end{array}\right] \overset{II_v \cdot (-e^{-t})}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 5e^{-t} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad C_1' = -11, \quad C_2' = 5e^{-t}$$

Integracijom zadnjih jednačina dobijamo

$$C_1(t) = -11t + D_1$$

$$C_2(t) = -5e^{-t} + D_2$$

Kako je

$$C_1(t) + 3C_2(t)e^t = -11t + \underset{\sim}{D_1} - 15 + \underset{\approx}{3D_2}\, e^t = D_1 + 3D_2e^t - 11t - 15$$

i $\quad C_1(t) + 2C_2(t)e^t = -11t + D_1 + (-10) + 2D_2e^t = D_1 + 2D_2e^t - 11t - 10$

to je opšte rješenje datog sistema

$$x(t) = D_1 + 3D_2e^t - 11t - 15$$

$$y(t) = D_1 + 2D_2e^t - 11t - 10$$

Znajući da je $y = C_1 x^2 + C_2 \frac{1}{x^2}$, $z = \frac{1}{3} C_1 x^2 - C_2 \frac{1}{x^2}$ opšte rješenje sistema

$$y'_x = \frac{1}{x} y + \frac{3}{x} z$$

$$z'_x = \frac{1}{x} y - \frac{1}{x} z$$

naći opšte rješenje sistema

$$y'_x = \frac{1}{x} y + \frac{3}{x} z + 1$$

$$z'_x = \frac{1}{x} y - \frac{1}{x} z$$

Rj. Imamo da su $\begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ \frac{1}{3} x^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$

linearno nezavisna rješenja datog homogenog sistema.
Opšte rješenje nehomogenog sistema tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x)\, x^2 + C_2(x) \frac{1}{x^2}$$

$$z(x) = \frac{1}{3} C_1(x)\, x^2 - C_2(x) \frac{1}{x^2}$$

pri čemu izvode $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ f-ja $C_1(x)$, $C_2(x)$ određujemo iz sistema

$$C_1' x^2 + C_2' \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\frac{1}{3} C_1' x^2 - C_2' \frac{1}{x^2} = 0$$

Nepoznate su C_1' i C_2' i sistem možemo rješiti Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ \frac{x^2}{3} & -\frac{1}{x^2} & 0 \end{array}\right] \overset{II_v \cdot 3}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ x^2 & -\frac{3}{x^2} & 0 \end{array}\right] \overset{II_v - I_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{x^2} & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{II_v \cdot \frac{1}{4}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & \frac{1}{x^2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \overset{I_v + II_v}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} x^2 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \underset{II_v \cdot (-x^2)}{\overset{I_v \cdot x^{-2}}{\sim}}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3}{4}x^{-2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4}x^2 \end{array}\right] \Rightarrow \quad C_1'(x) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$C_2'(x) = \frac{x^2}{4}$$

a zatim

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + D_1$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \frac{x^3}{12} + D_2$$

pri čemu su D_1 i D_2 proizvoljne konstante

Opšte rješenje nehomogenog sistema je

$$y(x) = D_1 x^2 + D_2 \frac{1}{x^2} - \frac{2}{3}x$$

$$z(x) = D_1 \frac{x^2}{3} - D_2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}x$$

$$C_1(x) \cdot x^2 = -\frac{3}{4}x + x^2 D_1$$

$$C_2(x) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x}{12} + \frac{1}{x^2} D_2$$

$$+$$

$$D_1 x^2 + D_2 \frac{1}{x^2} - \frac{8}{12}x$$

Zaključujemo da je

$$\begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x \\ -\frac{1}{3}x \end{pmatrix}$$

partikularno rješenje nehomogenog sistema.

(#) Odrediti opšte rješenje sistema linearnih jednačina

$$y_1' = y_1 + 3y_2 - 2y_3 + 1$$
$$y_2' = -y_1 + 2y_2 + y_3$$
$$y_3' = 3y_2 - y_3 + x$$

Rj.: Odredićemo prvo opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema jednačina.

$$y_1 - y_1' + 3y_2 - 2y_3 = 0$$
$$-y_1 + 2y_2 - y_2' + y_3 = 0$$
$$3y_2 - y_3 - y_3' = 0$$

Rješenja su u obliku

$$y_1 = A_1 e^{\lambda x}$$
$$y_2 = A_2 e^{\lambda x}$$
$$y_3' = A_3 e^{\lambda x}$$

Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{=\!=}{\overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=}} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -2 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{=\!=}} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

Karakteristična jednačina $(2-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)=0$ ima korijene $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=2$.

a) za $\lambda_1=-1$ dati sistem ima oblik

$$\left.\begin{array}{l} 2A_1+3A_2-2A_3=0 \\ -A_1+3A_2+A_3=0 \\ \underline{\quad 3A_2 \qquad\quad =0} \quad \Rightarrow \quad A_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 2A_1-2A_3=0 \\ \underline{-A_1+A_3=0} \\ A_1=A_3 \end{array}$$

(gdje je A_3 proizvoljno)

Ako za A_3 uzmemo 1 imamo

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(1)} \\ Y_2^{(1)} \\ Y_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \quad \text{tj.} \quad Y_1^{(1)}=e^{-x},\ Y_2^{(1)}=0,\ Y_3^{(1)}=e^{-x}$$

b) $\lambda_2=1$, sistem ima oblik

$$\begin{array}{l} 3A_2-2A_3=0 \\ -A_1+A_2+A_3=0 \\ \underline{3A_2-2A_3=0} \end{array} \Rightarrow A_1=\frac{5}{3}A_3,\quad A_2=\frac{2}{3}A_3$$

A_3 proizvoljno

Ako za A_3 uzmemo 3

$$Y_1^{(2)}=5e^{x};\ Y_2^{(2)}=2e^{x},\ Y_3^{(2)}=3e^{x} \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{x}$$

c) $\lambda_3=2$, sistem postaje

$$\begin{array}{l} -A_1+3A_2-2A_3=0 \\ -A_1 \qquad\quad +A_3=0 \\ \underline{\quad 3A_2-3A_3=0} \end{array} \Rightarrow A_1=A_2=A_3$$

A_3 proizvoljno

Za $A_3=1$

$$Y_1^{(3)}=e^{2x},\ Y_2^{(3)}=e^{2x},\ Y_3^{(3)}=e^{2x}$$

Opšte rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$Y_1=C_1e^{-x}+5C_2e^{x}+C_3e^{2x}$$
$$Y_2=\qquad\quad 2C_2e^{x}+C_3e^{2x}$$
$$Y_3=C_1e^{-x}+3C_2e^{x}+C_3e^{2x}$$

Pomoću metode varijacije konstanti sada tražimo opšte rješenje nehomogenog sistema jednačina u obliku

$$
\begin{aligned}
y_1 &= C_1(x)e^{-x} + 5C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{2x} \\
y_2 &= \qquad\qquad\quad 2C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{2x} \qquad \ldots (1) \\
y_3 &= C_1(x)e^{-x} + 3C_2(x)e^{x} + C_3(x)e^{2x}
\end{aligned}
$$

pri čemu izvode $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ i $C_3'(x)$ f-ja $C_1(x)$, $C_2(x)$ i $C_3(x)$ određujemo iz sistema:

$$
\begin{aligned}
C_1' e^{-x} + 5C_2' e^{x} + C_3' e^{2x} &= 1 \\
2C_2' e^{x} + C_3' e^{2x} &= 0 \\
C_1' e^{-x} + 3C_2' e^{x} + C_3' e^{2x} &= x
\end{aligned}
$$

Ovaj sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
e^{-x} & 5e^{x} & e^{2x} & 1 \\
0 & 2e^{x} & e^{2x} & 0 \\
e^{-x} & 3e^{x} & e^{2x} & x
\end{array}\right]
\overset{III_v + I_v\cdot(-1)}{\sim}
\left[\begin{array}{ccc|c}
e^{-x} & 5e^{x} & e^{2x} & 1 \\
0 & 2e^{x} & e^{2x} & 0 \\
0 & -2e^{x} & 0 & x-1
\end{array}\right] \sim
$$

$$
\overset{III_v + II_v}{\sim}
\left[\begin{array}{ccc|c}
e^{-x} & 5e^{x} & e^{2x} & 1 \\
0 & 2e^{x} & e^{2x} & 0 \\
0 & 0 & e^{2x} & x-1
\end{array}\right]
\underset{I_v + III_v\cdot(-1)}{\overset{II_v + III_v\cdot(-1)}{\sim}}
\left[\begin{array}{ccc|c}
e^{-x} & 5e^{x} & 0 & 2-x \\
0 & 2e^{x} & 0 & 1-x \\
0 & 0 & e^{2x} & x-1
\end{array}\right]
\underset{III_v \cdot e^{-2x}}{\overset{II_v : 2}{\sim}}
$$

$$
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c}
e^{-x} & 5e^{x} & 0 & 2-x \\
0 & e^{x} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \\
0 & 0 & 1 & (x-1)e^{-2x}
\end{array}\right]
\overset{I_v + II_v\cdot(-5)}{\sim}
\left[\begin{array}{ccc|c}
e^{-x} & 0 & 0 & \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \\
0 & e^{x} & 0 & \frac{1}{2}(1-x) \\
0 & 0 & 1 & (x-1)e^{-2x}
\end{array}\right]
$$

Prema tome

$$C_1' = \frac{1}{2}(3x-1)e^{x}, \quad C_2' = \frac{1}{2}(1-x)e^{-x} \quad i \quad C_3' = (x-1)e^{-2x}$$

Integracijom posljednjih jednačina dobijamo

$$C_1 = \left(\frac{3}{2}x-2\right)e^{x} + D_1, \quad C_2 = \frac{x}{2}e^{-x} + D_2 \quad i \quad C_3 = \frac{1-2x}{4}e^{-2x} + D_3$$

ozn(2)

U skalarnom obliku opšte rješenje glasi

$$Y_1 = D_1 e^{-x} + 5D_2 e^{x} + D_3 e^{2x} + \frac{14x-7}{4}$$

$$Y_2 = 2D_2 e^{x} + D_3 e^{2x} + \frac{1+2x}{4}$$

$$Y_3 = D_1 e^{-x} + 3D_2 e^{x} + D_3 e^{2x} + \frac{10x-7}{4}$$

(opšte rješenje smo dobili zamjenom dobijenih izraza iz (2) u (1)).

Riješiti sistem linearnih jednačina

$$x' = x - y + \frac{1}{\cos t}$$

$$y' = 2x - y$$

Rj. Prvo riješimo odgovarajući homogeni sistem

$$x - x' - y = 0$$
$$2x - y - y' = 0 \quad \ldots (1)$$

Matrica sistema je
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rješenja ovog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$.
Ako ovo uvrstimo u (1) poslije djeljenja sa $e^{\lambda t}$ imamo

$$(1-\lambda)A - B = 0$$
$$2A + (-1-\lambda)B = 0$$

Odredimo A i B.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$$

Karakteristična jednačina $\lambda^2 + 1 = 0$ ima korijene $\lambda_1 = i$ i $\lambda_2 = -i$.

(a) Za $\lambda_1 = i$ imamo

$$(1-i)A - B = 0 \quad /(1+i)$$
$$2A + (-1-i)B = 0$$

$$(1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 2$$

$$2A - (1+i)B = 0$$
$$2A - (1+i)B = 0$$

$$B = (1-i)A$$

Ako za A uzmemo 1, imamo:

$x_1 = e^{it}$

$y_1 = (1-i)\, e^{it}$

b) Za $\lambda = -i$ imamo
$$\begin{aligned}(1+i)A - B &= 0\\ 2A-(1-i)B &= 0\end{aligned} \qquad B=(1+i)A$$

Ako za A uzmemo 1
$$x_2 = e^{-it}$$
$$y_2 = (1+i)\, e^{-it}$$

Paru imaginarnih rješenja $(x_1,y_1), (x_2,y_2)$ možemo pridružiti par realnih rješenja.

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$
$$e^{-it} = \cos t - i\sin t$$
$$(1-i)e^{it} = (1-i)\cos t + i(1-i)\sin t$$
$$(1+i)e^{-it} = (1+i)\cos t - i(1+i)\sin t$$
$$i(1-i) + i(-1-i) = i+1-i+1 = 2$$

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1+x_2}{2} = \cos t$$

$$\tilde{y}_1 = \frac{y_1+y_2}{2} = \cos t + \sin t$$

$$\tilde{x}_2 = \frac{x_1-x_2}{2i} = \sin t$$

$$\tilde{y}_2 = \frac{y_1-y_2}{2i} = \sin t - \cos t$$

Rješenje homogenog sistema je
$$x = C_1\tilde{x}_1 + C_2\tilde{x}_2 = C_1\cos t + C_2 \sin t$$
$$y = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2 = C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t)$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opće rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t)=C_1(t)\cos t+C_2(t)\sin t$$
$$y(t)=C_1(t)(\cos t+\sin t)+C_2(t)(\sin t-\cos t)$$

pri čemu izvode f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sistema

$$C_1'(t)\cos t+C_2'(t)\sin t=\frac{1}{\cos t}$$
$$C_1'(t)(\cos t+\sin t)+C_2'(t)(\sin t-\cos t)=0$$

gdje nehomogeni dio ovog sistema je nehomogeni dio sistema diferencijalnih jednačina. Sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c}\cos t & \sin t & \frac{1}{\cos t}\\ \cos t+\sin t & \sin t-\cos t & 0\end{array}\right]\underset{II_v-I_v}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}\cos t & \sin t & \frac{1}{\cos t}\\ \sin t & -\cos t & -\frac{1}{\cos t}\end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{I_v\cdot\sin t\\ II_v\cdot\cos t}}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}\sin t\cos t & \sin^2 t & \frac{\sin t}{\cos t}\\ \sin t\cos t & -\cos^2 t & -1\end{array}\right]\underset{II_v-I_v}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}\sin t\cos t & \sin^2 t & \frac{\sin t}{\cos t}\\ 0 & -1 & -1-\frac{\sin t}{\cos t}\end{array}\right]$$

$$\underset{II_v\cdot(-1)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}\sin t\cos t & \sin^2 t & \frac{\sin t}{\cos t}\\ 0 & 1 & 1+\frac{\sin t}{\cos t}\end{array}\right]\underset{I_v+II_v\cdot(-\sin^2 t)}{\sim}\left[\begin{array}{cc|c}\sin t\cos t & 0 & \sin t\cos t-\sin^2 t\\ 0 & 1 & 1+\frac{\sin t}{\cos t}\end{array}\right]$$

$$\boxed{\frac{\sin t}{\cos t}-\sin^2 t-\frac{\sin^2 t}{\cos t}=\frac{\sin t-\sin^2 t\cos t-\sin^3 t}{\cos t}=\frac{\sin t\overbrace{(1-\sin^2 t)}^{\cos^2 t}-\sin^2 t\cos t}{\cos t}=\sin t\cos t-\sin^2 t}$$

$$\Rightarrow\quad C_1'(t)=1-\frac{\sin t}{\cos t}\quad i\quad C_2'(t)=1+\frac{\sin t}{\cos t}$$

Dakle

$$c_1(t)=\int\left(1-\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt=t+\ln|\cos t|+D_1$$

$$c_2(t)=\int\left(1+\frac{\sin t}{\cos t}\right)dt=t-\ln|\cos t|+D_2$$

Opšte rješenje sistema je

$$x(t)=(t+\ln|\cos t|+D_1)\cos t+(t-\ln|\cos t|+D_2)\sin t$$

$$=D_1\cos t+D_2\sin t+(\cos t+\sin t)t+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t|$$

$$y(t)=(t+\ln|\cos t|+D_1)(\cos t+\sin t)+$$

$$+(t-\ln|\cos t|+D_2)(\sin t-\cos t)$$

$$=(\cos t+\sin t)D_1+(\sin t-\cos t)D_2$$

$$+2t\sin t+2\cos t\ln|\cos t|$$

(#) Riješiti sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 4x + y - 36t$$
$$\dot{y} = -2x + y - 2e^t$$

Rj:

Prvo riješimo odgovarajući homogeni sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 4x + y \\ \dot{y} &= -2x + y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4x - \dot{x} + y &= 0 \\ -2x + y - \dot{y} &= 0 \end{aligned} \qquad \dots (1)$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Rješenja homogenog sistema su oblika $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$.
Ako ovo uvrstimo u (1) poslije dijeljenja sa $e^{\lambda t}$ imamo

$$\begin{aligned} (4-\lambda)A + B &= 0 \\ -2A + (1-\lambda)B &= 0 \end{aligned}$$

Odredimo A i B.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda) + 2 = 4 - 5\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

Karakteristična jednačina $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

a) $\lambda = 2$ sistem postaje

$$\begin{aligned} 2A + B &= 0 \\ -2A - B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad B = -2A$$

Ako za A uzmemo 1 $\quad x_1 = e^{2t}$, $y_1 = -2e^{2t}$

b) Za $\lambda=3$ sistem postaje

$$\begin{aligned} A+B&=0 \\ -2A-2B&=0 \end{aligned} \qquad B=-A$$

Ako za A uzmemo 1

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = -e^{3t}$$

Rješenje odgovarajućeg homogenog sistema je

$$x_h = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$
$$y_h = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t}$$

Sada metodom varijacije konstanti tražimo opće rješenje polaznog sistema u obliku

$$x = C_1(t) e^{2t} + C_2(t) e^{3t}$$
$$y = -2C_1(t) e^{2t} - C_2(t) e^{3t} \quad \ldots (2)$$

pri čemu izvode C_1', C_2' f-ja $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sistema

$$\begin{aligned} C_1'(t) e^{2t} + C_2'(t) e^{3t} &= -36t \\ -2C_1'(t) e^{2t} - C_2'(t) e^{3t} &= -2e^{t} \end{aligned}$$

Ovaj sistem rješimo Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{3t} & -36t \\ -2e^{2t} & -e^{3t} & -2e^{t} \end{array}\right] \overset{II_v + I_v \cdot 2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{3t} & -36t \\ 0 & e^{3t} & -2e^{t}-72t \end{array}\right] \overset{I_v - II_v}{\sim}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & 0 & 2e^{t}+36t \\ 0 & e^{3t} & -2e^{t}-72t \end{array}\right] \underset{II_v \cdot e^{-3t}}{\overset{I_v \cdot e^{-2t}}{\sim}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2e^{-t}+36te^{-2t} \\ 0 & 1 & -2e^{-2t}-72te^{-3t} \end{array}\right]$$

Prema tome

$$c_1'(t) = 36te^{-2t} + 2e^{-t}$$

$$c_2'(t) = -72te^{-3t} - 2e^{-2t}$$

Odavdje

$$c_1(t) = \int (36te^{-2t} + 2e^{-t})\,dt = \dots \quad \text{ZA VJEŽBU}$$

$$\dots = -2e^{-t} - 18te^{-2t} - 9e^{-2t} + D_1$$

$$c_2(t) = \int (-72te^{-3t} - 2e^{-2t})\,dt = \dots \quad \text{ZA VJEŽBU}$$

$$\dots = e^{-2t} + 24te^{-3t} + 8e^{-3t} + D_2$$

Uvrštavanjem u (2) dobijamo

$$x(t) = D_1e^{2t} + D_2e^{3t} - e^{t} + 6t - 1$$

$$y(t) = -2D_1e^{2t} - D_2e^{3t} + 12t + 3e^{t} + 10$$

traženo opće rješenje

Zadaci za vježbu

1. Riješiti sistem linearnih diferencijalnih jednačina

a)
$$\dot{x} = x + y + 2e^{t}$$
$$\dot{y} = 4x + y - e^{t}$$

Rješenja

a)
$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + \frac{1}{4} e^{t}$$
$$y(t) = 2C_1 e^{3t} - 2C_2 e^{-t} - 2e^{t}$$

b)
$$\dot{x} = 2y + 2$$
$$\dot{y} = -x + 3y + e^{-3t}$$

b)
$$x(t) = 2C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{10} e^{-3t} - 3$$
$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} - \frac{3}{20} e^{-3t} - 1$$

c)
$$\dot{x} - 3x + 4y = e^{-2t}$$
$$\dot{y} - x + 2y = -3e^{-2t}$$

d)
$$\dot{x} = y + 2e^{t}$$
$$\dot{y} = x + t$$

e)
$$\dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^{t} - 1}$$
$$\dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^{t} - 1}$$

f)
$$\dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$$
$$\dot{y} = -x + \operatorname{tg} t$$

Metod pogađanja partikularnog rješenja

(#) Riješiti sistem jednačina

$$\dot{x} = y - 5\cos t$$
$$\dot{y} = 2x + y$$

Rj: Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = 2x + y$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Za početak rješenja homogenog sistema tražimo u obliku $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Uvrštavajući ovo u homogeni sistem, nakon prebacivanja svih promjenjivih na jednu stranu i dijeljenjem sa $e^{\lambda t}$ dobijamo

$$-\lambda A + B = 0 \qquad \ldots (1)$$
$$2A + (1-\lambda)B = 0$$

Odredimo koeficijente A i B.
Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

Karakteristična jednačina sistema $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ima korijene $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -1$.

a) Za $\lambda = 2$ sistem (1) postaje

$$-2A + B = 0$$
$$2A - B = 0$$

$A = 1$
$B = 2$

$\Rightarrow x_1(t) = e^{2t}, \quad y_1(t) = 2e^{2t}$

b) Za $\lambda=-1$
$$\begin{aligned} -A-B&=0 \\ -2A-2B&=0 \end{aligned} \Rightarrow B=-A$$

Ako za A uzmemo 1 imamo $A=1$, $B=-1$

$$x_2(t)=e^{-t} \qquad y_2(t)=-e^{-t}$$

Opšte rješenje homogenog sistema je $\boxed{x_h=x_1+x_2,\ y_h=y_1+y_2}$

$$x_h(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$$
$$y_h(t)=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}$$

Rješenje nehomogenog sistema tražimo u obliku

$$x=x_h+x_p$$
$$y=y_h+y_p$$

Partikularna rješenja pronađimo metodom pogađanja partikularnog rješenja. Ovu metodu koristimo ako su svi nehomogeni dijelovi oblika

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{ili} \quad P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje je $P_m(t)$ polinom reda m. Tada je partikularno rješenje oblika (za tri promjenjive)

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \\ Q_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \\ R_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k=m+l$, a l je višestrukost $\alpha+\beta i$ kao korijena karakteristične jednačine, Jedini nehomogeni dio je $-5\cos t$.

$P_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t \Rightarrow m=0, \alpha=0, \beta=1$

$\alpha + i\beta = i$, i nije korijen karakteristične jedn. $\Rightarrow l=0$

$k=m+l=0 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} \sin t$$

Do konstanti dolazimo uvrštavajući partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih djelova ima samo onaj koji posmatramo.

$$-A\sin t + C\cos t = B\cos t + D\sin t - 5\cos t$$
$$-B\sin t + D\cos t = 2A\cos t + 2C\sin t + B\cos t + D\sin t$$

$$\begin{aligned} A + D &= 0 \\ B - C &= 5 \\ 2C + B + D &= 0 \\ 2A + B - D &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$A=-1$

$B=3$

$C=-2 \quad D=1$

$\Uparrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_p = -\cos t - 2\sin t$

$y_p = 3\cos t + \sin t$

Opšte rješenje sistema je

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - \cos t - 2\sin t$$

$$y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + 3\cos t + \sin t$$

Riješiti sistem jednačina

$$\dot{x} = 2x + y - 7te^{-t}$$
$$\dot{y} = -x + 2y - 1$$

Rj: Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = 2x + y$$
$$\dot{y} = -x + 2y$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Rješenja homogenog sistema tražimo u obliku $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Uvrštavajući ovo u homogeni sistem, nakon prebacivanja svih promjenjivih na jednu stranu i dijeljenjem sa $e^{\lambda t}$ dobijamo

$$\begin{aligned} (2-\lambda)A + B &= 0 \\ -A + (2-\lambda)B &= 0 \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

Odredimo koeficijente A i B. Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$
$$D = 16 - 20 = -4$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$

Korijeni karakteristične jednačine sistema $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ $\lambda_1 = 2+i$ i $\lambda_2 = 2-i$.

a) Za $\lambda = 2+i$ sistem (1) postaje $\begin{aligned} -iA + B &= 0 \\ -A - iB &= 0 \end{aligned}$ $\Rightarrow A = -iB$

$\Rightarrow$ Ako je $A=1$ $\Rightarrow$ $B=i$

$$\overline{x}_1(t)=e^{(2+i)t}=e^{2t}\cdot e^{it}=e^{2t}(\cos t+i\sin t)$$
$$\overline{y}_1(t)=ie^{(2+i)t}=e^{2t}(-\sin t+i\cos t)$$

$$\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{y}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{bmatrix}e^{2t}+i\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}e^{2t}$$

$\overline{z}_1=a+ib$
$\overline{z}_2=a-ib$
$\Downarrow$
$\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{2}=a$ $\quad$ $\frac{\overline{z}_1-\overline{z}_2}{2i}=b$

Na osnovu ovog rješenja možemo zaključiti da je

$$x_h(t)=(c_1\cos t+c_2\sin t)e^{2t}$$
$$y_h(t)=(-c_1\sin t+c_2\cos t)e^{2t}$$

Partikularno rješenje odredimo metodom pogađanja partikularnog rješenja. Ovu metodu koristimo ako su svi nehomogeni dijelovi oblika

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{ili} \quad P_m(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje je $P_m(t)$ polinom reda m. Tada je partikularno rješenje oblika

$$\begin{bmatrix}x_p\\ y_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_k^1\\ Q_k^2\end{bmatrix}e^{\alpha t}\cos\beta t+\begin{bmatrix}R_k^1\\ R_k^2\end{bmatrix}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k=m+l$, a l je višestrukost od $\alpha+i\beta$ kao korijena karakteristične jednačine.

a) Posmatrajmo nehomogeni dio $-7te^{-t}$

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=1, \ \alpha=-1, \ \beta=0$$

$\alpha+i\beta=-1$, -1 nije korijen karakter. jedn. $\Rightarrow l=0$

$k=m+l=1 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At+B \\ Ct+D \end{bmatrix} e^{-t}$$

$$x_p=(At+B)e^{-t} \Rightarrow \dot{x}_p = Ae^{-t}+(At+B)\cdot(-1)e^{-t} =$$
$$=(-At+(A-B))e^{-t}$$

$$y_p=(Ct+D)e^{-t} \Rightarrow \dot{y}_p = Ce^{-t}+(Ct+D)e^{-t}\cdot(-1) =$$
$$=(-Ct+(C-D))e^{-t}$$

Do konstanti dolazimo uvrštavajući partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih dijelova ima samo onaj koji posmatramo

$$\dot{x}=2x+y-7te^{-t}$$
$$\dot{y}=-x+2y$$

$\Leftarrow$ u ovom dijelu smo "izbacili" -1

$$(-At+(A-B))e^{-t}=(2A+C)te^{-t}+(2B+D)e^{-t}-7te^{-t}$$
$$(-Ct+(C-D))e^{-t}=(-A+2C)te^{-t}+(-B+2D)e^{-t}$$

$$3A+C=7$$
$$-A+3B+D=0$$
$$-A+3C=0$$
$$-B-C+3D=0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \dots \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 21/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 14/25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 21/50 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad A=\frac{21}{10}, \quad B=\frac{14}{25}, \quad C=\frac{7}{10}, \quad D=\frac{21}{50}$$

$$x_{p_1}=\left(\frac{21}{10}t+\frac{14}{25}\right)e^{-t}$$

$$y_{p_1}=\left(\frac{7}{10}t+\frac{21}{50}\right)e^{-t}$$

b) Sad posmatrajmo drugi nehomogeni dio -1

$$P_m(t)\,e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=0,\ \alpha=0,\ \beta=0$$

$\alpha+i\beta=0$, nula nije korijen karakt. jedn $\Rightarrow l=0$

$k=m+l=0 \Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

Konstante A i C ćemo odrediti uvrštavajući ovo partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih djelova ima samo ovaj koji posmatramo.

$x_p = A \quad \dot{x}_p = 0, \qquad y_p = B, \quad \dot{y}_p = 0$

$$\begin{aligned} 2A + B &= 0 \\ -A + 2B &= 1 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$-A + \frac{4}{5} = 1$$

$$A = -\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} 2A + B &= 0 \\ + \quad -2A + 4B &= 2 \end{aligned}$$

$$5B = 2 \Rightarrow B = \frac{2}{5}$$

$$x_{p_2} = -\frac{1}{5}$$

$$x_{p_2} = \frac{2}{5}$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x = \underbrace{(c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^{2t}}_{x_h} + \underbrace{\left(\frac{21}{10}t + \frac{14}{25}\right)e^{-t}}_{x_{p_1}} \underbrace{- \frac{1}{5}}_{x_{p_2}}$$

$$y = \underbrace{(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)e^{2t}}_{y_h} + \underbrace{\left(\frac{7}{10}t + \frac{21}{50}\right)e^{-t}}_{y_{p_1}} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{y_{p_2}}$$

(#) Riješiti sistem jednačina

$$x' = 2x - y - z + e^{2t}$$
$$y' = 3x - 2y - 3z + \cos t$$
$$z' = -x + y + 2z + e^{t}$$

Rj. Riješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$x' = 2x - y - z$$
$$y' = 3x - 2y - 3z$$
$$z' = -x + y + 2z$$

Matrica sistema je $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ako u sistem uvrstimo $x = Ae^{\lambda x}$, $y = Be^{\lambda x}$, $z = Ce^{\lambda x}$ poslije sređivanja i djeljenja sa $e^{\lambda x}$ dobićemo

$$(2-\lambda)A - B - C = 0$$
$$3A + (-2-\lambda)B - 3C = 0$$
$$-A + B + (2-\lambda)C = 0$$

Odredimo koeficijente A, B i C. Determinanta zadnjeg sistema je

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{I_v + III_v}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{I_k - III_k}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -2-\lambda & -3 \\ \lambda-3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 6 & -2-\lambda \\ \lambda-3 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big(6 + (2+\lambda)(\lambda-3)\big)$$

$$= (1-\lambda)\big(6 + \underset{\sim}{2\lambda} + \lambda^2 - 6 \underset{\sim}{- 3\lambda}\big) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-1)$$

Karakteristična jednačina sistema je $\lambda(1-\lambda)(\lambda-1)=0$ i njeni korijeni su $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=1$.

Kako je $\lambda_2=1$ korijen višestrukosti dva, opšte rješenje homogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

ili

$$x(t) = \underbrace{A_1 e^{\lambda_1 t}}_{x_1(t)} + \underbrace{P_k(t) e^{\lambda_2 t}}_{x_2(t)}$$
$$y(t) = A_2 e^{\lambda_1 t} + Q_k(t) e^{\lambda_2 t}$$
$$z(t) = A_3 e^{\lambda_1 t} + Q_k(t) e^{\lambda_3 t}$$

gdje su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k=r+s-n$ gdje je

- r rang matrice $A-\lambda_2 I$
- s višestrukost korijena
- n red sistema

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{III_v + I_v}{\overset{II_v + I_v\cdot(-3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A-\lambda_2 I)=1$$

$$k = r+s-n = 1+2-3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = A_1 e^{0t} + B_1 e^t = A_1 + B_1 e^t$$
$$y = A_2 + B_2 e^t$$
$$z = A_3 + B_3 e^t \qquad \ldots(1)$$

Ako (1) uvrstimo u datu jednačinu sistema dobićemo

$$B_1 e^t = 2A_1 + 2B_1 e^t - A_2 - B_2 e^t - A_3 - B_3 e^t$$
$$B_2 e^t = 3A_1 + 3B_1 e^t - 2A_2 - 2B_2 e^t - 3A_3 - 3B_3 e^t$$
$$B_3 e^t = -A_1 - B_1 e^t + A_2 + B_2 e^t + 2A_3 + 2B_3 e^t$$

$$2A_1 - A_2 - A_3 = 0$$
$$B_1 - B_2 - B_3 = 0$$
$$3A_1 - 2A_2 - 3A_3 = 0$$
$$3B_1 - 3B_2 - 3B_3 = 0$$
$$-A_1 + A_2 + 2A_3 = 0$$
$$-B_1 + B_2 + B_3 = 0$$

$$2A_1 - A_2 - A_3 = 0$$
$$3A_1 - 2A_2 - 3A_3 = 0$$
$$-A_1 + A_2 + 2A_3 = 0$$

$\vdots$

$$A_1 + A_3 = 0 \qquad A_1 = -A_3$$
$$A_2 + 3A_3 = 0 \qquad A_2 = -3A_3$$

$$B_1 - B_2 - B_3 = 0$$
$$B_1 = B_2 + B_3$$

Tri promjenjive uzimamo proizvoljno npr. $A_3 = -C_1$

$B_2 = C_2$; $B_3 = C_3$

Opšte rješenje homogenog sistema je

$$x_h(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^t$$

$$y_h(t) = 3C_1 + C_2 e^t$$

$$z_h(t) = -C_1 + C_3 e^t$$

Sad dati nehomogeni sistem rješimo metodom pogađanja partikularnog rješenja. Ovu metodu koristimo ako su svi nehomogeni dijelovi oblika

$$P_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t \quad \text{ili} \quad P_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t$$

gdje je $P_m(t)$ polinom reda m.

Tada je partikularno rješenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \\ Q_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \\ R_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t}\sin\beta t$$

gdje su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k=m+l$, a l je višestrukost $\alpha+\beta i$ kao korijena karakteristične jednadžbe.

a) Posmatrajmo prvo nehomogeni dio e^{2t}. Taj dio je oblika $P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ $\Rightarrow$ $m=0,\ \alpha=2,\ \beta=0$

$\Rightarrow$ 2 ima višestrukost nula kao korijen kar. jednadž. $\Rightarrow$ $l=0$

$\Rightarrow$ $k=0$ $\Rightarrow$ Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ z_{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' \\ B' \\ C' \end{bmatrix} e^{2t}$$

Do konstanti A', B', C' dolazimo uvrštavajući partikularno rješenje u sistem gdje od nehomogenih dijelova jedino ostavljamo onaj koji posmatramo

$$2A'e^{2t} = 2A'e^{2t} - B'e^{2t} - C'e^{2t} + e^{2t}$$
$$2B'e^{2t} = 3A'e^{2t} - 2B'e^{2t} - 3C'e^{2t}$$
$$2C'e^{2t} = -A'e^{2t} + B'e^{2t} + 2C'e^{2t}$$

← u ovoj jednačini smo izbacili cost

← u ovoj jednačini smo izbacili nehomogeni dio e^t

$$-B' - C' = -1$$
$$3A' - 4B' - 3C' = 0$$
$$-A' + B' = 0$$

$\Rightarrow$ $A' = \frac{3}{2},\ B' = \frac{3}{2},\ C' = -\frac{1}{2}$

b) Posmatrajmo nehomogeni dio $\cos t$. Taj dio je oblika

$$P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t \Rightarrow m=0,\ \alpha=0,\ \beta=1$$

i je korjen višestrukosti nula $\Rightarrow l=0 \Rightarrow k=m+l=0$

Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_2} \\ y_{p_2} \\ z_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}\cos t + \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix}\sin t$$

Do konstanti dolazimo uvrštavanjem partikularnog rješenja u sistem koji od nehomogenih djelova ima samo onaj koji posmatramo.

$$\underline{-A\sin t} + D\cos t = 2A\cos t + \underline{2D\sin t} - B\cos t - \underline{E\sin t} - C\cos t - \underline{F\sin t}$$

$$\underline{\underline{-B\sin t}} + E\cos t = 3A\cos t + \underline{\underline{3D\sin t}} - 2B\cos t - \underline{\underline{2E\sin t}} - 3C\cos t - \underline{\underline{3F\sin t}} + \cos t$$

$$\underline{\underline{\underline{-C\sin t}}} + F\cos t = -A\cos t - \underline{\underline{\underline{D\sin t}}} + B\cos t + \underline{\underline{\underline{E\sin t}}} + 2C\cos t + \underline{\underline{\underline{2F\sin t}}}$$

$$A+2D-E-F=0$$

$$2A-B-C-D=0$$

$$B+3D-2E-3F=0$$

$$3A-2B-3C-E=-1$$

$$C-D+E+2F=0$$

$$-A+B+2C-F=0$$

Rješenjem sistema dobijamo

$$A=\frac{1}{2},\ B=1,\ C=-\frac{1}{2},\ D=\frac{1}{2},\ E=2,\ F=-\frac{1}{2}$$

c) Ostalo je još da posmatramo e^t. Iz $P_m(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$

$$\Rightarrow \quad m=0,\ \alpha=1,\ \beta=0$$

Korijen 1 je višestrukosti dva kao korijen karakteristične jednačine. $\Rightarrow l=2 \quad \Rightarrow k=m+l=2$

Partikularno rješenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_3} \\ y_{p_3} \\ z_{p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x t^2 + B_x t + C_x \\ A_Y t^2 + B_Y t + C_Y \\ A_z t^2 + B_z t + C_z \end{bmatrix} e^t$$

Do konstanti dolazimo uvrštavanjem partikularno rješenje u sistem koji od nehomogenih dijelova ima samo onaj koji posmatramo.

$$(2A_x t + B_x)e^t + (A_x t^2 + B_x t + C_x)e^t = (2A_x - A_Y - A_z)t^2 e^t + \\ + (2B_x - B_Y - B_z)te^t + (2C_x - C_Y - C_z)e^t$$

$$(2A_Y t + B_Y)e^t + (A_Y t^2 + B_Y + C_Y)e^t = (3A_x - 2A_Y - 3A_z)t^2 e^t + \\ + (3B_x - 2B_Y - 3B_z)te^t + (3C_x - 2C_Y - 3C_z)e^t$$

$$(2A_z t + B_z)e^t + (A_z t^2 + B_z t + C_z)e^t = (-A_x + A_Y + 2A_z)t^2 e^t + \\ + (-B_x + B_Y + 2B_z)te^t + (-C_x + C_Y + 2C_z)e^t + e^t$$

$$A_x - A_y - A_z = 0$$
$$-2A_x + B_x - B_y - B_z = 0$$
$$-B_x + C_x - C_y - C_z = 0$$

...

$$3A_x - 3A_y - 3A_z = 0$$
$$-2A_y + 3B_x - 3B_y - 3B_z = 0$$
$$-B_y + 3C_x - 3C_y - 3C_z = 0$$
$$-A_x + A_y + A_z = 0$$
$$-2A_z - B_x + B_y + B_z = 0$$
$$-B_z - C_x + C_y + C_z = -1$$

Rješenje sistema je

$A_x = 0$, $A_y = 0$ $A_z = 0$

$B_x = -1$, $B_y = -3$, $B_z = 2$

$$C_x - C_y - C_z = -1$$
$$C_x = C_y + C_z - 1$$

Opšte rješenje nehomogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

U našem slučaju

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^t + \frac{3}{2} e^{2t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \quad + D_1 + D_2 - 1) e^t$$
$$y(t) = 3C_1 + C_2 e^t + \frac{3}{2} e^{2t} + \cos t + 2\sin t \quad 3t + D_1) e^t$$
$$z(t) = -C_1 + C_3 e^t - \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + (2t + D_2) e^t$$

je traženo opšte rješenje.

(C_1, C_2, C_3, D_1, D_2 su proizvoljne konstante).

Zadaci za vežbu

(6) Riješiti sistem jednačina

(a)
$$6u' - u - 7v + 5w = 10e^x$$
$$2v' + u + v - w = 0$$
$$3w' - u + 2v - w = e^x$$

(b)
$$\frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t$$
$$\frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t$$

c)
$$\frac{du}{dx} + 4v = \cos 2x$$
$$\frac{dv}{dx} + 4u = \sin 2x$$

d)
$$\dot{x} = 2x + y + 2e^t$$
$$\dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}$$

e)
$$\dot{x} = x - y - 8t$$
$$\dot{y} = 5x - y$$

f)
$$\dot{x} = 2x - y$$
$$\dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t$$

Rješenja:

(a)
$$u = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + e^x$$
$$v = 2C_1 + \frac{1}{2}(C_3 - C_2)\cos x - \frac{1}{2}(C_3 + C_2)\sin x$$
$$w = 3C_1 - \frac{1}{2}(C_2 + C_3)\cos x + \frac{1}{2}(C_2 - C_3)\sin x + e^x$$

b)
$$x = 1 - 2(t - \pi) + 2\sin t$$
$$y = 4(t - \pi) - 2\cos t - 3\sin t$$

c)
$$u = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{3}\sin 2x$$
$$v = C_1 e^{-4x} - C_2 e^{4x} + \frac{1}{10}\cos 2x$$

Prvi integrali sistema

Pretpostavimo da je sistem diferencijalnih jednačina dat u obliku (normalni oblik)

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\vdots \qquad \dots (1)$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

Ako za svako rješenje $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sistema (1) f-ja $\phi(x, y_1, \dots, y_n)$ ima konstantnu vrijednost, tj. ako vrijedi

$$\phi(x, y_1, \dots, y_n) = C$$

pri čemu jednom rješenju odgovara jedna konstanta, onda se jednakost $\phi = C$ zove <u>prvi integral sistema (1)</u>.

<u>Primjer</u> (prvi integral sistema)

Neka je dat sistem

$$\frac{dy}{dx} = z$$

$$\dots (2)$$

$$\frac{dz}{dx} = y$$

Rješenje ovog sistema je par (y, z) gdje je

$$y = \frac{1}{2} D_1 e^{x} + \frac{1}{2} D_2 e^{-x} \quad i \quad z = \frac{1}{2} D_1 e^{x} - \frac{1}{2} D_2 e^{-x},$$

D_1 i D_2 su konstante.

Posmatrajmo f-je $\phi_1=(y+z)e^{-x}$ i $\phi_2=(y-z)e^{x}$.
Kako je

$$\phi_1=D_1 \quad i \quad \phi_2=D_2$$

za rješenje sistema (2) to su ϕ_1 i ϕ_2 prvi integrali sistema (2).

Ako je poznato n prvih integrala

$$\phi_i(x, y_1, \dots, y_n)=C_i, \qquad (i=1,2,\dots,n), \qquad \dots (3)$$

koji su međusobno nezavisni, tj. za koje je funkcionalna determinanta

$$\frac{D(\phi_1,\dots,\phi_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\phi_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial\phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

različita od nule, onda je rješenje sistema (1) dato sa (3)

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y_1,\dots,y_n)&=C_1 \\ \phi_2(x,y_1,\dots,y_n)&=C_2 \\ &\vdots \\ \phi_n(x,y_1,\dots,y_n)&=C_n \end{aligned}$$

Prvi integrali se određuju pomoću kombinacija, koje omogućuju da se jednačina sistema može napisati kao izvod nekog izraza, pa se tako jednostavno integrali.

(#) Riješiti sistem $\frac{dy}{dx} = z$

$\frac{dz}{dx} = y$.

Rj. Sabiranjem datih jednačina dobijamo

$$\frac{dy + dz}{dx} = y + z$$

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z \Rightarrow \frac{d(y+z)}{y+z} = dx$$

$$\ln|y+z| = C_1 + x$$

$$y+z = e^{C_1 + x}$$

$$y+z = D_1 e^x$$

Time je prvi integral $\phi_1 = (y+z)e^{-x} = D_1$

Oduzimanjem datih jednačina dobijamo

$$\frac{d(y-z)}{dx} = -(y-z) \Rightarrow \frac{d(y-z)}{y-z} = -dx \Rightarrow y - z = D_2 e^{-x}$$

Drugi prvi integral je $\phi_2 = (y-z)e^x = D_2$

Ovi integrali su međusobno nezavisni jer je

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(y,z)} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{vmatrix} = -e^0 - e^0 = -2 \neq 0$$

Iz sistema $(y+z)e^{-x} = D_1$

$(y-z)e^x = D_2$

dobija se rješenje datog sistema:

$$y = \frac{1}{2} D_1 e^x + \frac{1}{2} D_2 e^{-x}$$

$$z = \frac{1}{2} D_1 e^x - \frac{1}{2} D_2 e^{-x}$$

D_1, D_2 su proizv. realn. konst.

(#) Riješiti sistem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{y}{z}$$

Rj. Iz prve jednačine sistema slijedi prvi integral

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = C_1 x \Rightarrow$$

$$\phi_1 = \frac{y}{x} = C_1$$

Da bi smo odredili drugi prvi integral, napisaćemo sistem u drugačijem obliku

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad /\cdot \frac{1}{z}$$

$$\frac{dz}{-y} = \frac{dx}{z} \quad /\cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$$

$$\frac{dz}{-xy} = \frac{dx}{xz} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-yx}$$

Iskoristimo osobinu proporcije: ako

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

onda je

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = t$$

Na osnovu ove osobine imamo

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{yxz + xyz} = \frac{dz}{-xy}$$

$$\frac{d(xy)}{2xyz} = -\frac{dz}{xy}$$

$$d(xy) = -2z\,dz \quad \Rightarrow \quad xy = -z^2 + C_2$$

Drugi prvi integral je $\phi_2 = xy + z^2 = C_2$.

Da li su ϕ_1 i ϕ_2 međusobno nezavisni?

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ x & 2z \end{vmatrix} = \frac{2z}{x} \neq 0$$

Dobijeni prvi integrali su nezavisni, pa je opšte rješenje

$$y = y(x, C_1, C_2)$$
$$z = z(x, C_1, C_2)$$

dato sa

$$y = C_1 x$$
$$z = \pm\sqrt{C_2 - C_1 x^2}.$$

(#) Sistem

$$y' = y^2 z$$
$$z' = \frac{z}{x} - yz^2$$

ima rješenje

$$y = C_2 e^{C_1 x^2}, \quad z = \frac{2C_1}{C_2} x e^{-C_1 x^2}, \quad y = 0, \quad z = Cx.$$